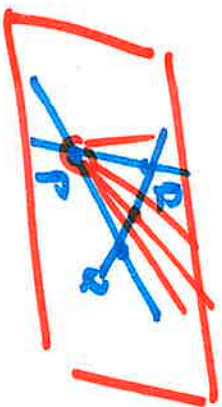


Geometria affine $\rightarrow$ si può costruire a partire da pochi e
rette.

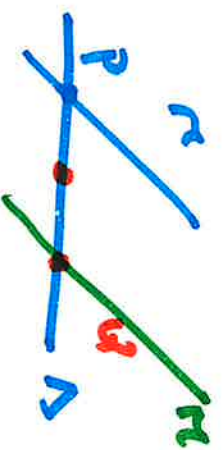


oss: Siano π, γ due rette con $\pi \cap \gamma = \{P\} \Rightarrow$

3! piano che contiene π ed γ e tale piano si
può "costruire" unendo con rette $\forall$ punti $\lambda \in \pi$ con
un punto $\lambda \neq P$ + rette $\parallel \pi$ $\pi \cap \lambda_0$.

$$h = [P; W] \quad \gamma = [P; \lambda] \Rightarrow \pi \supseteq \pi, \gamma$$

$$\pi = [P; W + \lambda]$$

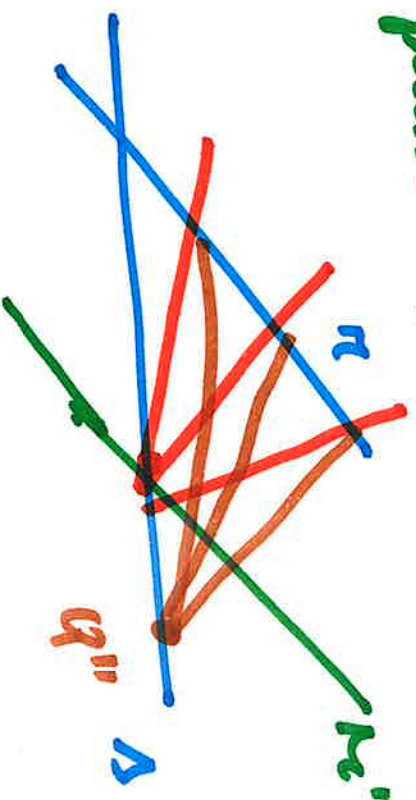


ris $\forall \lambda \in \gamma$ con $\lambda \neq P$ ed X un punto
di π arbitraria per non in

$\pi' \in [q; w] \Rightarrow$ la retta $\overleftrightarrow{qx}$ interseca π in un punto y perché non parallela ad $\pi \Rightarrow$ ogni punto di $\pi \setminus \pi'$ si ottiene in questo modo.

per quanto riguarda i punti di π' osserviamo che possiamo ottenerli come punti di rette per un altro punto $q'' \in \Delta$ ed intersecarli con π .

[A] 7.3



oss: Sia $AG_n(k)$ uno spazio affine. Allora le trasformazioni di $AG_n(k)$ in n sono

(che preservano le proprietà geometriche) sono
della forma in coordinate

$$X \rightarrow AX + T$$

con $A \in GL(n, \mathbb{R})$ matrice invertibile e T
vettore.

Essi corrispondono anche ai possibili cambiamenti di
riferimento affine.

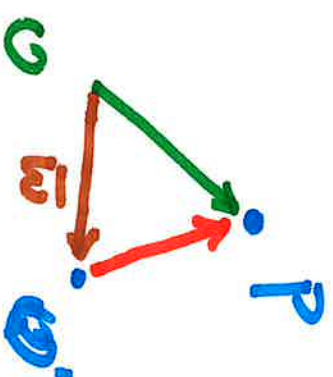
$$P = (O, B) \quad B = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$$

$$P' = (O', B') \quad B' = (\bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_n).$$

Siano X ed X' le coordinate di un punto P
rispetto a B e B' rispettivamente.

$$\vec{OP} = [\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n] X$$

$$\vec{O'P} = [\bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_n] X'$$



$$\text{Sia } \bar{w} = \vec{O'O} = [\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n] S$$

$$\Rightarrow -\vec{O'P} = \vec{PO} + \vec{OO'} \Rightarrow \vec{O'P} = \vec{O'O} + \vec{OP} =$$

$$= -\vec{O'O} + \vec{OP} =$$

$$[\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n] (X - S) = [\bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_n] X' = [\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n] (X - S)$$

Scriviamo dunque

$$\begin{bmatrix} \bar{e}'_1 \\ \vdots \\ \bar{e}'_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{bmatrix}$$

con A matrice di camb. di base.

$${}^T \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{bmatrix} (x-s) = [\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n] X'$$

$$\stackrel{||}{=} {}^T (A \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{bmatrix}) (x-s) \Rightarrow {}^T A (x-s) = X' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{X' = {}^T A X + T}$$

$$\text{ove } T = -{}^T A S$$

Le trasformazioni di $AG_n(k)$ in n sono n. ottenute componendo una trasformazione lineare (A) con una traslazione.

Fra le trasformazioni "isocromatiche" ci sono le simmetrie.

DEF: In $A_{Gn}(Ik)$ siano P, Q due punti.

Si dice punto medio fra P e Q il punto M tale che $\vec{PM} = \vec{MQ}$.

In particolare se $n \neq 0 \Rightarrow Q = P + 2\vec{PM} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{PM} = \frac{1}{2}\vec{PQ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = P + \frac{1}{2}\vec{PQ}$$

Se $P = (x'_1 \dots x'_n)$ e $Q = (x''_1 \dots x''_n) \Rightarrow$

$$\Rightarrow M = (x'_1 \dots x'_n) + \frac{1}{2}[(x''_1 \dots x''_n) - (x'_1 \dots x'_n)]$$

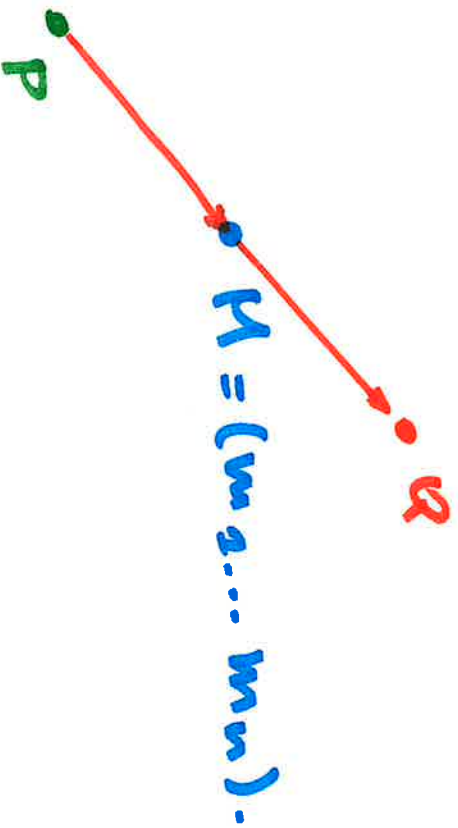
$$= \left(\frac{x'_1 + x''_1}{2} \dots \frac{x'_n + x''_n}{2} \right)$$

Def: Si dice simmetria di centro M una trasformazione

$A \rightarrow A$ di $AG_n(K)$ che manda ogni punto

$P = (x_1 \dots x_n)$ nel punto $Q = (y_1 \dots y_n)$ tale che

M sia il punto medio fra P e Q .



$$m_i = \frac{x_i + y_i}{2} \Rightarrow y_i = 2m_i - x_i$$

$$Y = 2M - X.$$

In generale si dice fascio di rette un insieme di ∞^2 rette di piani

che soddisfano una condizione lineare.

Def: In $AG_2(K)$ si dice



1) fascio proprio di rette l'insieme di tutte le rette per un punto P



2) fascio improprio di rette l'insieme di tutte le rette parallele ad una retta data.

Oss: $\forall Q \neq P$ $\exists$ una retta del fascio per P passante per Q .

$\forall Q$ $\exists$ una retta di un fascio improprio per Q .

1) Sia h una retta non passante per $P \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall$ punto di h $\exists$ una retta del fascio di vertice P

viceversa, per ogni retta del fascio di centro P $\exists$ un punto x e h tale che quella retta sia $m \perp a$ o meno che non $\exists$ tratti della parallela per P ad r .



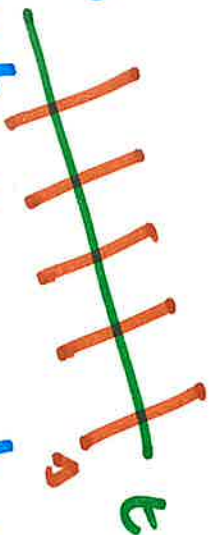
C'è una iniezione fra le rette del fascio di centro P non parallele ad r ed i punti di r .

" $\infty^1 + 1$ " rette

1) Se il fascio proprio $\parallel$ a r $\exists$ una retta non

parallela ad $a \Rightarrow$

ogni retta del fascio



interseca t in esattamente un punto ed ad ogni punto di t corrisponde una ed una sola retta di $\mathcal{H}$. $\rightarrow \infty^1$

Sia $P \in AG_1(k)$ di coordinate (x_P, y_P) e siano π, λ due rette per P con $\pi \neq \lambda$.
 Allora ogni retta del fascio di centro P (H_P) si può scrivere (la equazione) del tipo $\alpha \cdot \pi + \beta \cdot \lambda = 0$ con $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

$$\pi: \alpha x + b y + c = 0$$

$$\lambda: \alpha' x + b' y + c' = 0$$

$$\pi: x - x_P = 0$$

$$\lambda: y - y_P = 0$$

$$\alpha(x - x_P) = \beta(y - y_P)$$

$$P \in \pi \Rightarrow \alpha x_P + b y_P + c = 0$$

$$P \in \lambda \Rightarrow \alpha' x_P + b' y_P + c' = 0$$

$$\Rightarrow P \in \alpha \pi + \beta \lambda$$



Sia $Q \in AG_1(k)$ con $Q \neq P \Rightarrow Q = (x_Q, y_Q)$. In particolare non può essere $Q \in \pi \cap \lambda$ perché $\pi \cap \lambda = P$.

$$\text{WLOG: } Q \notin \pi \Rightarrow \alpha x_Q + b y_Q + c \neq 0 \Rightarrow \alpha(\alpha x_Q + b y_Q + c) + \beta(\alpha' x_Q + b' y_Q + c') = 0$$

trova una soluzione (∞^2 soluzioni!)

$$\alpha = \beta \frac{a'x_0 + b'y_0 + c'}{ax_0 + by_0 + c}$$

→ tutte queste soluzioni
sono proporzionali e quindi
danno la medesima retta
escludendo $(\alpha, \beta) = (0, 0)$.

—
Sia $\eta_{(e,m)}$

il fascio improprio di rette // alla retta
am $mx - \ell y = 0$

(la direzione è generata da (e, m)).

⇒ ogni altra retta della medesima direzione

ha eq. $\alpha(mx - \ell y) + \beta = 0$ con $\alpha \neq 0$.

Per ogni punto $P = (x_p, y_p)$ si calcolano (a, b) come

~~$a = x_p - x_0$~~ ~~$b = y_p - y_0$~~

alternativi $B = -2(m x_0 - c y_0) I$.

N.B. con $a \neq 0$ si hanno eq. proporzionali per la
medesima retta.

OSS: ricordiamo che il sistema $AX = B$ compat. descrive
il sott. affine $[X_0; \text{Ker}(A)]$
il cui sott. di traslazione è $\text{Ker}(A)$.

↓
ogni volta che vogliamo confrontare sottospazi:
di traslazione dobbiamo studiare $\text{Ker}(A)$
cioè l'insieme delle soluzioni del sistema
omogeneo $AX = \underline{0}$

In particular

$$AX=B \rightarrow \Sigma \text{ no zero rows} = [P; M]$$

$$A'X=B' \rightarrow \Pi \text{ no zero columns} = [Q; W]$$

$$\Rightarrow \Sigma // \Pi \Leftrightarrow M \subseteq W \text{ oppure } W \subseteq M$$

$$\Leftrightarrow M = W \cap M \text{ oppure } W = W \cap M.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AX=0 \\ A'X=0 \end{cases} \text{ equivalente } AX=0$$

oppure

$$\begin{cases} AX=0 \\ A'X=0 \end{cases} \text{ equivalente ad } A'X=0$$

$$\Leftrightarrow \text{rk} \begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix} = \text{rk}(A)$$

$$\Leftrightarrow \text{rk} \begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix} = \max$$

$$(\text{rk}(A), \text{rk}(A')).$$

$$\text{oppure}$$

$$\text{rk} \begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix} = \text{rk}(A')$$

$$\pi: ax + by + c = 0$$

$$\lambda: a'x + b'y + c' = 0$$

$$\pi // \lambda \Leftrightarrow \kappa_k \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 0$$

$n=3$ π lies in $AG_3(K)$

$$P = (x_P, y_P, z_P)$$

$$Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$$

$$\kappa := [P; \mathcal{L}(\vec{PQ})]$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \\ z_Q - z_P \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix} \in \mathcal{L} \begin{bmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \\ z_Q - z_P \end{bmatrix} \Rightarrow \kappa_k \begin{pmatrix} x - x_P & y - y_P & z - z_P \\ x_Q - x_P & y_Q - y_P & z_Q - z_P \end{pmatrix} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x - x_P}{x_Q - x_P} = \frac{y - y_P}{y_Q - y_P} = \frac{z - z_P}{z_Q - z_P} \Rightarrow \text{was } \kappa_k \in \text{denn } \kappa_k$$

alle int. d. 2 p.wi
nen paralle

in quanto in $AG_3(K)$ servono 2 equazioni indip. per avere ∞^2 soluzioni.

$$\pi: ax + by + cz + d = 0$$

$$\sigma: a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

$$\pi // \sigma \Leftrightarrow rk \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 1 \text{ ed in questo caso } \begin{array}{l} \pi = \sigma \\ \pi \cap \sigma = \emptyset \end{array}$$

Infatti se $\exists p \in \pi \cap \sigma \Rightarrow \pi = [p; u] = \sigma$.

$$\text{e invece } rk \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \ker \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \text{ ha}$$

$$\dim = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \pi \cap \sigma$ è una retta.

$$\begin{array}{c|c|c} rk(A) & rk(A|B) & \\ \hline 1 & 1 & \pi = \sigma \\ 1 & 2 & \pi \cap \sigma = \emptyset \text{ ma } \pi // \sigma \\ 2 & 2 & \pi \cap \sigma = \pi. \end{array}$$

Def: Si dice fascio proprio di piani in $AG_3(K)$ di sostegno una retta h l'insieme di tutti i piani passanti per h .

Si dice fascio improprio di generare $\mathcal{M}$ con $\dim \mathcal{M} = 2$, l'insieme di tutti i piani paralleli a una retta h di traslazione $\mathcal{M}$.

Esattamente come per $n=2$ si vede che

ne

$$\pi: ax + by + cz + d = 0$$

$$\sigma: a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

$$\text{ed } \pi \subseteq \pi \cap \sigma \Rightarrow \pi \subseteq \alpha \cdot \pi \cap \sigma$$

Dim: basta far vedere che $\alpha \pi \cap \sigma = \emptyset$ $\alpha(ax + by + cz + d) +$

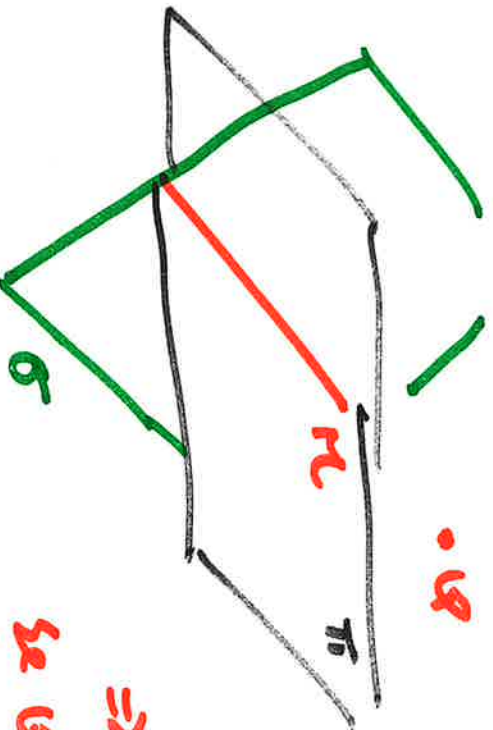
$$\beta(a'x + b'y + c'z + d') = 0$$

contiene 2 punti distinti di h .

in quanto $d\pi + p\sigma$ è un vett. affine e
 se contiene 2 punti distinti: $\delta \neq \sigma \Rightarrow$ due rette
 anche il vett. affine generato da quei due punti:
 ma tale sottospazio è π . $\square$

In particolare se è intersezione di 2 qualsiasi
 piani distinti del fascio che le ha per sostegno.

Oss: Ogni piano del fascio si scrive con una eq. che è
 e linee dist di 2 piani distinti finché di ero.



$$\pi: ax + by + cz + d = 0$$

$$\sigma: a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

ma σ un piano passante π .

$$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ con } \sigma \neq \pi.$$

$$\text{se } \lambda \in \pi \Rightarrow \sigma = \pi$$

$$\text{se } \lambda \notin \pi \Rightarrow \sigma \neq \pi$$

Supponiamo $Q \neq \pi \circ \sigma \Rightarrow$

$$\alpha_0 (ax_0 + by_0 + cz_0 + d) + \beta_0 (a'x_0 + \dots + d') = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = -\beta \frac{a'x_0 + b'y_0 + c'z_0 + d'}{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}.$$

$(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$

posizioni reciproche di 2 rette

$$r: AX = B$$

$$r: AX = B'$$

$$r \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} ax'' + by'' + c'z'' + d'' = 0 \\ a'''x + b'''y + c'''z + d''' = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} B \\ B' \end{pmatrix} \quad \text{inferno da studiare}$$

$$AX = 0$$

$$A'X = 0$$

$$AX = 0 \text{ non}$$

$$\text{eq. } A'X = 0.$$

$\text{rk} \begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix}$	$\text{rk} \begin{pmatrix} A & B \\ A' & B' \end{pmatrix}$		
2	2	$n // 0$	$n = 1$
2	3	$n \cap \Delta = \emptyset$	∞^1
3	3	$n \cap \Delta = \{p\}$	1
3	4	$n \cap \Delta = \emptyset$	0

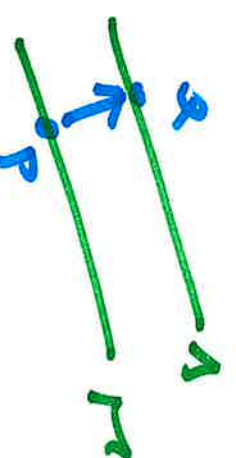
in questo caso $\rightarrow$ la matrice n ed n
non detta oggettiva

Def: Due rette r ed s in $AG_3(K)$ sono sghembe
 se e solo se sono contenute in alcuni piano
 comune $\Rightarrow$ Non sono coplanari.

Teorema: r ed s sono sghembe $\Leftrightarrow$ esse non sono
 parallele e non disgiunte.

Dim: Se $r \parallel s \Rightarrow r = [P; \mathcal{U}]$; $s = [Q; \mathcal{U}]$ e
 $r \cap s = \emptyset \Rightarrow \nexists$ intercetta in piano
 che le contiene.

se $r \neq s \Rightarrow \pi = [P; L(\vec{PQ}) + \mathcal{U}]$
 le contiene entrambe



$$\text{Se } \pi \cap \gamma = \{P\} \Rightarrow \pi = [P; \mu] ; \gamma = [\gamma; \omega]$$

$$\Rightarrow \pi \cup \gamma \subseteq \pi = [P; \mu + \omega]$$

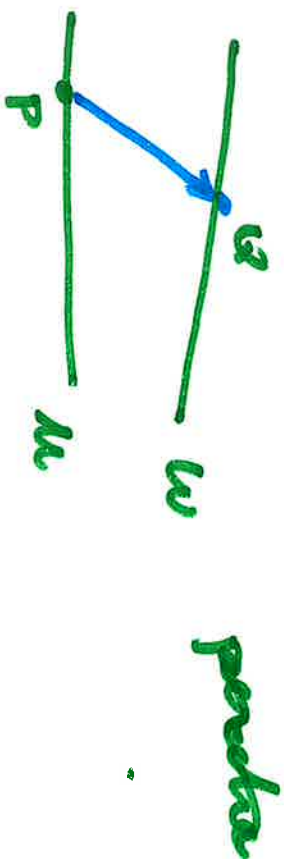
Se π ed γ sono sghembe $\Rightarrow$ esse devono essere
non parallele e disgiunte.

Viceversa: π ed γ non parallele e disgiunte

$$\Rightarrow \pi = [P; \mu] \text{ ed } \gamma = [\gamma; \omega]$$

e forse $PQ \in \mu + \omega \Rightarrow \pi$ ed γ si intersecano

coincidenti



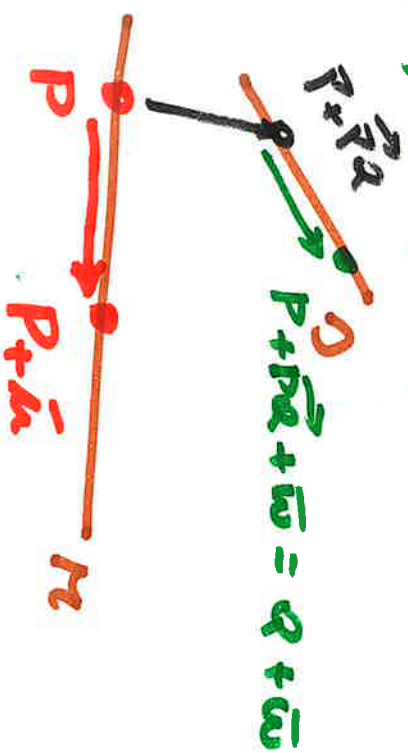
$\Rightarrow$ poiché PQ è indiv. rispetto $\mu + \omega$.

inoltre $\dim(\mu + \omega) = 2$ poiché altrimenti $\pi \parallel \gamma$.

quindi se $\mathcal{H} = \mathcal{L}(\bar{u})$, $\mathcal{W} = \mathcal{L}(\bar{w})$

$\Rightarrow$ i vettori $\vec{PQ}$, $\bar{u}$, $\bar{w}$ sono linearmente indipendenti. consideriamo i punti:

$$P, P + \bar{u}, P + \vec{PQ}, P + \vec{PQ} + \bar{w}$$



nono 4 punti in π non ma se fossero
contenuti in un piano π dovremmo avere

$$\pi = [P; T] \text{ con } \dim T = 2$$

$$\text{e } \bar{u}, \vec{PQ}, \vec{PQ} + \bar{w} \in T \Rightarrow \bar{u}, \vec{PQ}, \bar{w} \in T \text{ e}$$

$$\dim \mathcal{L}(\bar{u}, \bar{w}, \vec{PQ}) = 3 \text{ w.}$$